

Exercice N°1 (3 points)(Voir page 2)Exercice N°2:( 4 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , Soit le nombre complexe  $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ .

- 1) Déterminer la forme trigonométrique de  $z_0$  ;
- 2) Vérifier que :  $z_0^4 + \overline{z_0}^4 = -32$
- 3)a) Soit  $a = (\sqrt{3} - 1) + i(1 + \sqrt{3})$ . Vérifier que  $a = \sqrt{2} \cdot z_0 \cdot e^{\frac{i\pi}{6}}$  et déterminer alors sa forme trigonométrique.
- b) En déduire  $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ .

Exercice N°3: ( 7 points)

1) Le plan P est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

- a) Résoudre dans C l'équation :  $z^2 - 2z + 4 = 0$ .
  - b) Exprimer les solutions  $z_1$  et  $z_2$  sous forme exponentielle.
- 2) On donne dans P les points A, B et C d'affixes respectives  $1 + i\sqrt{3}$ , 2 et  $1 - i\sqrt{3}$   
Montrer que le quadrilatère OABC est un losange

4) a) Soit  $z$  un nombre complexe distinct de 1 et  $\theta \neq 2k\pi$  tel que  $\frac{z+1}{z-1} = e^{i\theta}$

Montrer que  $z = \frac{-i}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

b) En déduire dans C les solutions de l'équation : (E') :  $\left(\frac{2z+2}{z-1}\right)^2 - 2\left(\frac{2z+2}{z-1}\right) + 4 = 0$

Exercice N°4 : (6 points)

Soit la fonction  $f$  est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2 \sin\left(\frac{2}{x}\right)}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- 1)a) Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $|f(x)| \leq x^2$ .
- b) En déduire la limite de  $f$  à droite en 0.
- c) Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0.
- 2) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ . Interpréter chaque fois le résultat obtenu.
- 3) Soit  $h$  la fonction définie sur  $]-1, +\infty[$  par  $h(x) = f(-\sqrt{x+1})$ .
  - a) Montrer que  $h$  est continue sur  $]-1, +\infty[$ .
  - b) Montrer que l'équation  $h(x) = -\frac{1}{4}$  admet au moins une solution dans  $]0, 1[$ .

## Annexe à rendre avec les copies

<b>Nom</b> :..... <b>Prénom</b> :.....	<b>Classe</b> :..... <b>N°</b> :.....
---	--

### I- Cocher l'unique réponse exacte dans chacun des cas suivants :

1) Si  $f$  est une fonction continue sur l'intervalle  $[-2,4]$  tels que  $f(-2)=2$  et  $f(4)=-1$  Alors l'équation :  $f(x)=1$

- admet une unique solution dans  $[-2,4]$     
  admet au moins une solution dans  $[-2,4]$     
  n' admet pas de solution dans  $[-2,4]$

2) Soit  $z = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ ), alors :

- $z = \cos(2\theta)$     
   $z = 1$     
   $z = \sin(2\theta)$

3) Si  $f$  est une fonction croissante continue et ne s'annule pas sur un intervalle  $[a, +\infty[$  avec  $a$  est un réel, alors :

- $\frac{1}{f}$  est croissante sur  $[a, +\infty[$     
   $\frac{1}{f}$  est décroissante sur  $[a, +\infty[$     
   $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

### II- Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est **vraie** ou **fausse**.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

1) Si  $z$  est un nombre complexe d'argument  $\frac{\pi}{3}$  alors  $z^{2010}$  est un nombre réel.

2) l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  différent de 1 du plan telle que  $\left| \frac{z}{1-z} \right| = 1$  est une droite parallèle à l'axe des réels.

3) On considère l'équation (E) suivante :  $z^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)z + 1 = 0$ .  
 L'équation (E) a deux solutions complexes de modules égaux à 1.